La importancia del orden en los códigos: sistemas de numeración posicionales

Al tratar de los sistemas de numeración griegos hemos visto la enorme cantidad de símbolos necesarios para expresar números y si éstos son grandes, el simbolismo aumenta. Otro tanto ocurre con los números romanos, que también conoces.

Frente a este tipo de sistemas, el sistema de numeración decimal, el que empleamos habitualmente, sólo requiere de 10 símbolos: las cifras 0, 1, 2,...., 8 y 9. Para ser exhaustivos diremos que la coma (o punto) decimal cierra las necesidades para la escritura de cualquier número. Y eso no es lo único que lo hace tan ágil y potente, sino que además permite operar con rapidez y facilidad.

Cuando escribimos 4342, el hecho de que aparezcan símbolos repetidos en diferentes posiciones no nos extraña, pues sabemos que el orden determina el valor y la necesidad de colocar las cifras en esa posición.

También conocemos bien que ese número indica que está formado por 4 unidades de mil, o millares, 3 centenas, 4 decenas y 2 unidades. El lenguaje usado en esta descomposición enmascara lo que de verdad es relevante: la relación con 10 y sus sucesivas potencias. Dicho de otra manera, ese número responde a esta organización:

$$4342 = 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Es decir, que indica el número de unidades que contiene organizadas según el número 10 y sus potencias.

Como esta expresión recuerda a los polinomios diremos que las cifras que constituyen el número en esa base son los coeficientes de los términos de las sucesivas potencias, empezando por 10^0, que indica la cifra de menor orden, o más a la derecha en la escritura, siguiendo con el coeficiente de 10^1, o simplemente 10, y así sucesivamente con los coeficientes de las sucesivas potencias de 10.

De la misma manera, si quisiéramos entender ese número como el resultado de organizar las unidades en torno a 5 y sus potencias todo cambiaría, pues supondríamos que su descomposición sería así:

$$4342 = 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$

o mejor, y para evitar equívocos y resaltar el hecho de que el número corresponde a una organización en base 5, pondríamos:

$$4342_{(5)} = 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$

Y entenderíamos que

$$4342_{(5)} = 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 4 \cdot 625 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5^0 = 2500 + 75 + 20 + 2 = 2647_{(10)}$$

Eso significa que 2647 unidades de las que contamos habitualmente se organizan como 4342 si se distribuyen en torno a 5 y sus potencias.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Habitualmente al referirnos a la base 10 no denotamos qué base es, pues es la base por excelencia.

Por otro lado, debemos considerar que al utilizar la base 5 sólo se requieren 5 cifras: 0,1,2,3 y 4 en consecuencia 5 unidades decimales dan lugar a la expresión $10_{(5)}$.

Por lo tanto el número 4342 no podría corresponder a una base menor que 5, pues el 4 forma parte de su composición y en base 4, 4 unidades se expresarían como $10_{(4)}$, es decir con 2 cifras, puesto que $4 = 1 \cdot 4^1 + 0$ y como son los "coeficientes" de la descomposición en suma de potencias quienes nos indican las cifras constitutiva de la expresión es esa base, lo deberemos leer como $10_{(4)}$.

Si consideramos el 3 como base, 4 unidades se estructuran como $4 = 3 + 1 = 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$, es decir, el número que corresponde a esas unidades decimales es $11_{(3)}$.

Para escribir en una base cualquiera un número decimal, debo estructurarlo de acuerdo a las sucesivas potencias de esa base, como ya hemos visto en el caso de la base 10 y de la base 5. Por ejemplo, para escribir en base 8 el número decimal 9681, deberé conocer las sucesivas potencias de 8:

$$8^0 = 1 \,;\, 8^1 = 8 \,;\, 8^2 = 64 \,;\, 8^3 = 512 \,;\, 8^4 = 4096 \,;\, 8^5 = 32768$$

Está claro que 9681 contiene al menos 2 veces a la cuarta potencia de 8. Por lo tanto el cociente entero de dividir 9681 entre 4096 es 2 y el resto correspondiente es 1489. Cantidad que al ser dividida por 512 (ocho al cubo), da 2 y el resto es 465. Esta cantidad entre 64 da cociente 7 y resto 17. Ese resto es 2 por 8 más 1. Por lo tanto:

$$9681 = 2 \cdot 8^4 + 2 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 1 = 22721_{(8)}$$

Queda, pues, bien claro que la estructura polinómica es la que permite escribir un número en una determinada base.

Sin embargo resulta más práctico el proceso inverso: dividir por 8 y el resto de la división entera son las unidades de base 8, el resto serán *octenas*. De nuevo división entera entre 8, el resto serán las octenas que no pueden organizar en *sesentaycuatrenas*, etc. Esas expresiones, son las correspondientes a decenas, centenas, millares...

		8	8	8	8
Cocientes	9681	1210	151	18	2
Restos	1	2	7	2	

De esta manera sin necesidad de calcular previamente las sucesivas potencias obtengo las cifras del sistema en base 8 que me dan el número, en este caso 22721.

Propuesta 1

Practica, escribiendo en base 7 el número 12035

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Propuesta 2

Escribe en base 2 el número 1619

Si la base es mayor que 10 necesitamos ampliar el número de cifras. Así la base 12, tan frecuente en tantas situaciones diarias, requiere de las cifras 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B

Propuesta 3

Escribe en base 12, el número 3592

El cambio inverso -pasar de un número escrito en cierta base a la base decimal- se realiza, como hemos visto, desarrollando el polinomio que estructura el número en la base considerada para determinar el número total de unidades.

Propuesta 4

Halla en base 10 el número que corresponde a $34051_{(6)}$

Habrás visto que la base 2, llamada binaria, sólo utiliza 0 y 1. Lo que la hace extremadamente útil, en especial, en el mundo digital.

Propuesta 5

Supongamos que se quiere asociar a cada día del mes un código y se ha elegido el que se obtiene pasando cada número a base 2. Escribe las expresiones que en el código binario corresponderían a los diferentes días del mes. Es decir, del 1 al 31 por si el mes tiene 28, 29, 30 ó 31 días.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL