Javier Bergasa Liberal

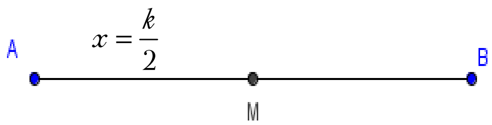
Àlgebra amb regle i compàs?

En aquesta activitat treballarem amb algunes construccions geomètriques que segur que coneixes. La novetat principal serà la interpretació que en farem, les utilitzarem per resoldre equacions senzilles que representarem amb segments o figures.
Comencem per una situació ben senzilla: representem un segment de longitud qualsevol, la qual representarem per k. Direm que el segment té longitud k i, en principi, suposarem que k és un número natural.

El segment AB és de longitud k

Dividir el segment en 2 parts iguals és una operació senzilla, de fet ens fa determinar un segment de longitud x que compleixi la relació: $2x = k$.
És a dir, estem davant la necessitat de trobar la solució *geomètrica* d'aquesta equació: $2x = k$.

La solució és senzilla ja que el segment x que resol la situació és el determinat pel punt mitjà i un dels extrems del segment anterior.



Per localitzar el punt mitjà utilitzarem el compàs. La construcció ja la coneixes, el que canvia és l'àmbit en el que treballem, ara actuem per resoldre una equació: busquem el segment que fa certa la igualtat que se'ns ha plantejat.

Si tens accés a Geogebra ja saps que hi ha una eina que de forma automàtica assenyala el punt mitjà d'un segment.
Un cop tenim el punt M, l'equació ja està resolta perquè AM o MB són segments que tenen la longitud buscada.

Sembla lògic plantejar-se ara trobar el segment solució de l'equació $3x = k$

Ara el que es tracta és de dividir el segment inicial en tres trossos. No existeix un mètode tan ràpid per a fer-ho com en el cas anterior. Podríem fer-ho així: trobem un punt P sobre la recta que conté el segment de partida AB que estigui a la mateixa distància d'A que el punt mitjà M:

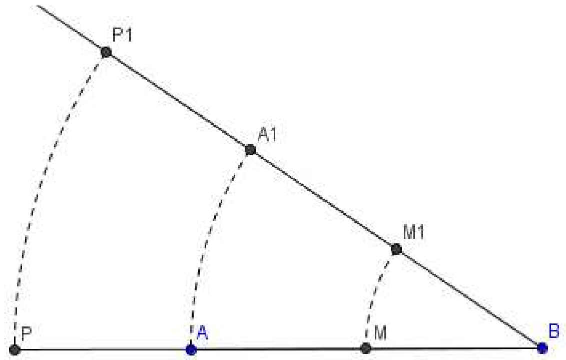
$d(A,B) = x = k$

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Si emprem Geogebra, usarem l'opció "simetria central" del menú de transformacions per a trobar el simètric del punt mitjà.

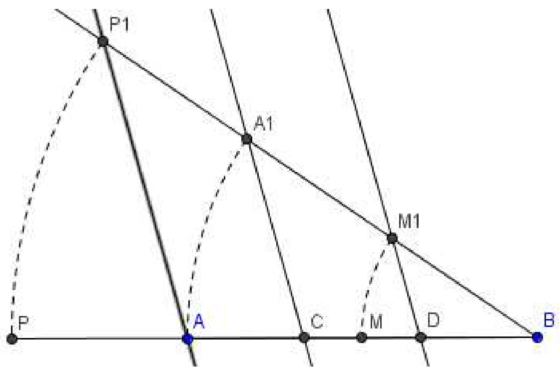
D'aquesta manera, el segment PB està dividit en 3 parts d'igual longitud, $\frac{k}{2}$.

Si dibuixo una semirrecta per B –pot ser perpendicular al segment inicial– i amb el compàs centrat a B hi dibuixo els punts corresponents als que dividien el segment PB en tres parts iguals tindré:



$d(A,B) = x = k$

Si ara dibuixem la recta determinada per A i P_1 i les seves paral·leles a ella per A_1 i M_1, la situació serà:



$d(A,B) = x = k$

Aquesta situació es correspon amb la descrita pel teorema de Tales i, en conseqüència, els punts C i D divideixen el segment original en tres trossos iguals. Tenim doncs que el segment AC que verifica $d(A,C) = \frac{k}{3}$ és solució del problema. Cosa que també pot dir-se dels segments CD o DB.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Proposta 1

Utilitza el programa Geogebra, o el regle i el compàs, per a trobar el segment que resol les equacions següents, que són una generalització del que hem fet abans:

$$4x = k$$
$$5x=k$$

Proposta 2.

Igualment cal que resolguis les equacions següents:

$$\frac{x}{2} = k$$
$$\frac{x}{3} = k$$

que són anàlogues a les anteriors, i la solució de les quals obtindràs ampliant el segment inicial.

D'aquesta manera donem un significat geomètric a les equacions de primer grau, les que en general escrivim com $ax + b = c$.

Un problema concret que es pot abordar amb el que hem après seria:

Donat un rectangle amb costats de longitud a i b, amb a diferent de b, troba un quadrat que tingui el mateix perímetre.

El rectangle té un perímetre $p= 2(a+b)$. Per tant ens caldrà trobar un segment de longitud desconeguda, que anomenarem x, que serà el costat del quadrat que busquem i que haurà de satisfer l'equació:

$$4x = 2(a+b)$$

és a dir

$$x = \frac{2(a+b)}{4} = \frac{p}{4} = \frac{a+b}{2}$$

Proposta 3

Dibuixa un rectangle de costats qualssevol a i b, determina x i construeix, emprant Geogebra, el quadrat isoperimètric al rectangle. Observa que en realitat el que estem buscant és la mitjana aritmètica dels números a i b, o si ens ho mirem des del punt de vista geomètric el punt mitjà del segment format pels dos costats a i b del rectangle.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL