Javier Bergasa Liberal

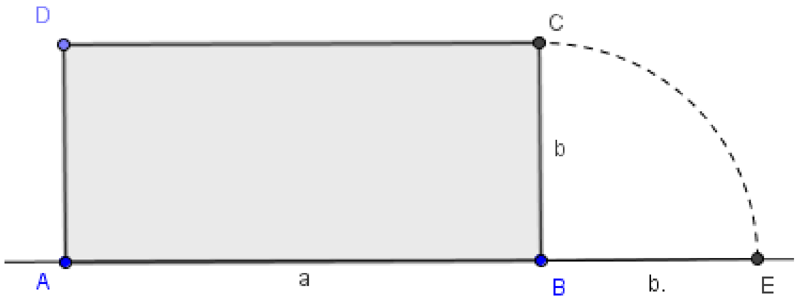
¿Álgebra con regla y compás también para ecuaciones de segundo grado?

Si bien en la actividad anterior hemos comenzado resolviendo ecuaciones desde el punto de vista geométrico para terminar con un problema, ahora lo haremos al revés. Comenzaremos planteando un problema cuya solución está estrechamente relacionada con una ecuación de segundo grado.

El problema se enuncia de manera similar al visto anteriormente: dado un rectángulo de lados a y b, halla un cuadrado de área igual a la del rectángulo.
Se trata de determinar el lado del cuadrado que satisfaga la situación.
Algebraicamente estamos ante esta ecuación: $x^2 = a \cdot b$.

Supongamos que nuestro rectángulo es éste:

Para ello procederemos de la siguiente manera: llevaremos un segmento igual al BC sobre la recta determinada por AB, con origen en B y cuyo extremo pertenezca a la semirrecta que determinada por B no contiene a A. En realidad, basta con “abatir” el segmento BC sobre la recta del lado AB



Simplificaremos nuestra construcción y nos quedaremos con el segmento AE formado por los AB y BE

Construyamos ahora una semicircunferencia de diámetro AE, es decir $a + b$. Para ello necesitas el punto medio del segmento. Esa semicircunferencia, como sabes, permite asegurar que cualquier punto de ella y los extremos del diámetro AE determinan un triángulo rectángulo.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Propuesta 1

Comprueba con Geogebra que ese ángulo es recto. Señala además qué argumento te permite realizar esa afirmación sin necesidad de medir. Recuerda para ello las propiedades de los ángulos considerados en una circunferencia: centrales, inscritos...

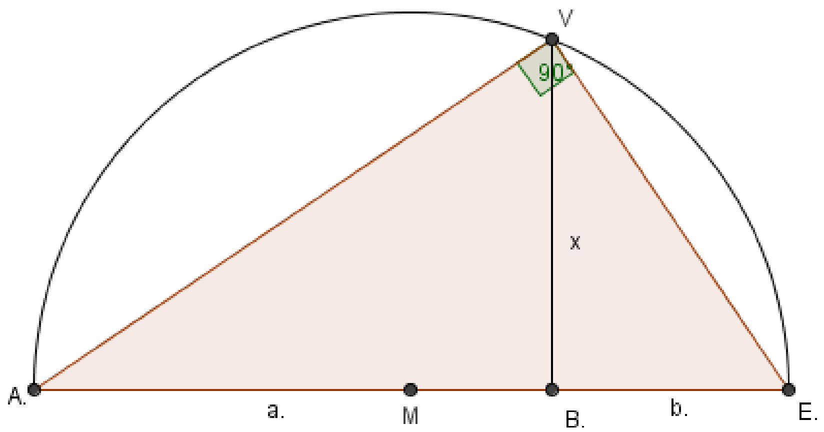
Señala el punto de la circunferencia que nos interesa para resolver el problema. ¿Cuál es ese punto?
Como AE es hipotenusa del triángulo, necesito un vértice V para el triángulo cuya altura determine en la hipotenusa AE los segmentos de longitud a y b del problema enunciado.
¿Por qué así? Porque el teorema de la altura asegura que ésta es media proporcional de los segmentos que determina sobre la hipotenusa. Es decir:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

O lo que es igual:

$$x^2 = a \cdot b$$

La figura final tendrá este aspecto, donde M es el punto medio del segmento.



Propuesta 2

Una interesante observación es que acabamos de utilizar la media aritmética y la media geométrica de dos cantidades a y b. Señálalas en la figura. ¿Puedes utilizar la figura para determinar cuál es mayor? Razona la respuesta. ¿Podrían ser iguales? Estudia la situación y expón razonadamente tus conclusiones

Finalmente, destaquemos que hemos aprendido a resolver ecuaciones de segundo grado incompletas del tipo:

$$m \cdot x^2 - n = 0$$

con m y n naturales

Pues de ahí pasaríamos a $x^2 = k$ y de esta a $x^2 = a \cdot b$ donde a y b satisfacen $k = a \cdot b$. Si k es primo uno de los factores será 1.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL