Javier Bergasa Liberal

La importància de l'ordre en la codificació: sistemes de numeració posicionals

Al tractar els sistemes de numeració grecs hem vist l'enorme quantitat de símbols necessaris per a expressar els números, i com augmentava el simbolisme amb la mida dels números. Amb els números romans passa el mateix.

En contraposició a aquest tipus de sistemes, el sistema de numeració decimal, el que utilitzem habitualment, només necessita 10 símbols: les xifres 0,1,2,3,4,5,6,7,8 i 9. Per ser ben precisos direm que afegint la coma (o punt) decimal podem escriure qualsevol número. Però no és només aquest estalvi de símbols el que el fa tan àgil i potent sinó el fet que permet operar amb rapidesa i facilitat.

Quan escrivim 4342 el fet que apareguin símbols repetits en diferents posicions no se'ns fa estrany ja que sabem que l'ordre determina el valor i la necessitat de col·locar les xifres en una o altra posició.

També sabem bé que aquest número indica que està format per 4 milers, 3 centenes, 4 desenes i 2 unitats. El llenguatge que utilitzem en aquesta descomposició emmascara el que és en veritat important: la relació amb el 10 i les seves potències. Dit d'una altra manera, aquest número respon a la següent ordenació:

$$4342 = 4\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0$$

És a dir, aquesta notació ens indica el número d'unitats que conté organitzades segons el número 10 i les seves potències.

Com que aquesta expressió ens recorda els polinomis, direm que les xifres que constitueixen el número en aquesta base són els coeficients dels termes de les successives potències, començant per 10^0, que indica la xifra de menor ordre, o més a la dreta en l'escriptura, seguint amb el coeficient de 10^1, o senzillament 10, i així successivament amb els coeficients de les successives potències de 10.

De la mateixa manera, si entenguéssim aquest número com el resultat de l'organització de les unitats al voltant del 5 i les seves potències tot canviaria, ja que llavors la seva descomposició seria així:

$$4342 = 4\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 4\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0$$

o millor, per evitar equívocs i ressaltar el fet que el número correspon a una organització en base 5, posaríem:

$$4342_{(5)} = 4\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 4\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0$$

i entendríem que

$$4342_{(5)} = 4\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 4\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0 = 4\cdot 625 + 3\cdot 25 + 4\cdot 5 + 2\cdot 5^0 = 2500 + 75 + 20 + 2 = 2647_{(10)}$$

Això significa que 2647 unitats tal com les comptem habitualment s'organitzen com a 4342 si es distribueixen al voltant del 5 i les seves potències.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Com que normalment utilitzem la base 10 no ho posem de manifest amb el subíndex, de fet 10 és la base per excel·lència.

Per escriure qualsevol número en base 5 només necessitarem cinc xifres: 0,1,2,3 i 4; el número 5 en notació decimal s'escriu en base cinc així:$10_{(5)}$.

Així doncs el número 4342 no pot estar escrit en una base menor que 5 perquè conté la xifra 4 i, en base 4 quatre unitats s'expressen $10_{(4)}$, o sigui amb dues xifres ja que $4 = 1 \cdot 4^1 + 0$.

Si considerem el 3 com a base, 4 unitats s'estructuren així: $4 = 3 + 1 = 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$, i el número que correspon aquestes unitats decimals és $11_{(3)}$.

Per escriure en una base qualsevol un número escrit en base 10 ens caldrà descomposar-lo com a suma de potències successives de la nova base tal com hem vist en el cas de la base 10 i 5. Per exemple, per escriure en base 8 el número 9681 ens caldrà conèixer les potències de 8:

$$8^0 = 1\,;\, 8^1 = 8\,;\, 8^2 = 64\,;\, 8^3 = 512\,;\, 8^4 = 4096\,;\, 8^5 = 32768$$

Es veu fàcilment que 9681 és més del doble de la quarta potència de 8. Si dividim 9681 entre 4096 obtindrem 2 de quocient i 1489 de residu. Aquest residu el dividim per 512, que és vuit al cub, i ens dóna 2 de quocient i 465 de residu. Ara dividim el residu ,465, entre 64 i tenim que el quocient és 7 i el residu 17 que és el doble de 8 més 1.
Tenim doncs:

$$9681 = 2 \cdot 8^4 + 2 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 1 = 22721_{(8)}$$

Queda, doncs, ben clar que l'estructura polinòmica és la que ens permet escriure un número en una base determinada.

De tota manera resulta més pràctic seguir el camí invers: dividir el número per 8, el residu de la divisió entera són les unitats de base 8, i el quocient les "octenes". Tornem a dividir per 8, el residu seran les "octenes" que no es poden agrupar en "seixantaquatrenes", etc. Aquestes expressions entre cometes són les que es corresponen a desenes, centenes, milers,...

		8	8	8	8
Quocients	9681	1210	151	18	2
Residus	1	2	7	2	

D'aquesta manera sense necessitat de calcular prèviament les successives potències de 8 obtenim les xifres del número en base 8 que en aquest cas són 22721.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Proposta 1

Practica, escrivint en base 7 el número 12035

Proposta 2

Escriu en base 2 el número 1619

Si la base és major que 10 necessitem ampliar el número de xifres. Així la base 12, tan freqüent en tantes situacions diàries, necessita les xifres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B

Proposta 3

Escriu en base 12, el número 3592

El canvi invers -passar d'una base diferent a 10 a la base decimal- es fa, tal i com hem vist, desenvolupant el polinomi que estructura el número en la base considerada per a determinar el número total d'unitats.

Proposta 4

Troba en base 10 el número que correspon a $34051_{(6)}$

Fixa't que la base 2, anomenada binària, només utilitza el 0 i l'1. Això la fa extremadament útil, en especial, en el món digital.

Proposta 5

Suposem que es vulgui associar a cada dia del mes un codi i que s'ha escollit el que s'obté passant cada número a base 2. Escriu les expressions que en el codi binari correspondrien als diferents dies del mes. Fes-ho de l'1 al 31 per si el mes té 28, 29, 30 o 31 dies.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL