Javier Bergasa Liberal

Més equacions amb regle i compàs.
L'equació de segon grau $x^2+ax-a^2 = 0$

Hem vist com resoldre algunes equacions "amb regle i compàs", tot i que enlloc del regle i el compàs l'eina que hem recomanat, per la seva eficiència, sigui Geogebra; cosa que tornem a fer.

Ara, enlloc de començar plantejant una equació i després fer-ne la interpretació geomètrica ho farem a l'inrevés: començarem amb un enunciat geomètric i n'analitzarem després la interpretació algebraica. Perquè ho fem així? Senzillament, perquè és així com els matemàtics grecs van estudiar aquests problemes. El problema que ens proposem resoldre és la proposició 11 del Llibre II dels *Elements* d'Euclides, diu així:

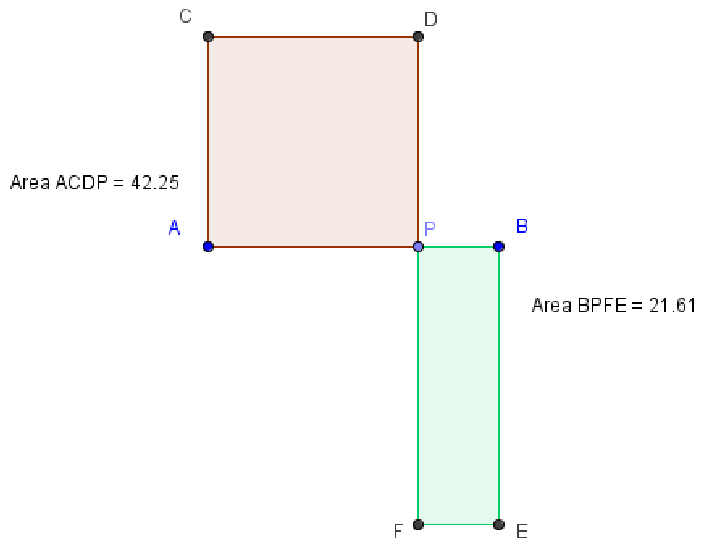
"Dividir un segment en dues parts de manera que el rectangle que té per costats el total i una de les parts sigui igual al quadrat de l'altra part".

D'acord amb l'enunciat considerarem un segment d'extrems A i B, de longitud qualsevol però coneguda. La longitud del segment en concret no és rellevant, pot ser qualsevol, l'anomenarem *a*.
El problema ens demana trobar un punt P del segment que el divideixi en dues parts que compleixin les condicions de l'enunciat de la proposició.

En el dibuix de sota el punt P divideix el segment AB, de longitud a, en dues parts, AP i PB. Si anomenen x la longitud d'AP, la del segment PB serà a-x.

Ara ens cal trobar la posició de P de manera que el quadrat de costat AP i el rectangle de costats PB i AB tinguin la mateixa superfície tal i com demana la proposició 11. El punt P que hem dibuixat està en una posició que és clar que no resol el problema.
.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL



Per tal de fer-nos una idea de la situació i aproximar la solució del problema, podem construir amb Geogebra un dibuix semblant als de dalt i moure la posició del punt P fins a aconseguir que les àrees del quadrat i del rectangle siguin iguals.

Un cop ho haguem aconseguit haurem resolt el problema. Què significa això?

Àrea ACDP= Àrea BPFE

És a dir, $AP^2 = PB \times BE$, però com que hem construït BE=AB podem escriure:

$$AP^2 = PB \cdot AB$$

Utilitzant ara els valors que hem donat a aquests segments, tindrem:

$$x^2 = (a - x) \cdot a$$

Que, si emprem l'àlgebra, podem escriure en la forma:

$$x^2 = a^2 - a \cdot x$$

I finalment en la forma:

$$x^2 + a \cdot x - a^2 = 0$$

Cosa que era el nostre objectiu: determinar x de manera que satisfés aquesta equació, és a dir, resoldre l'equació.

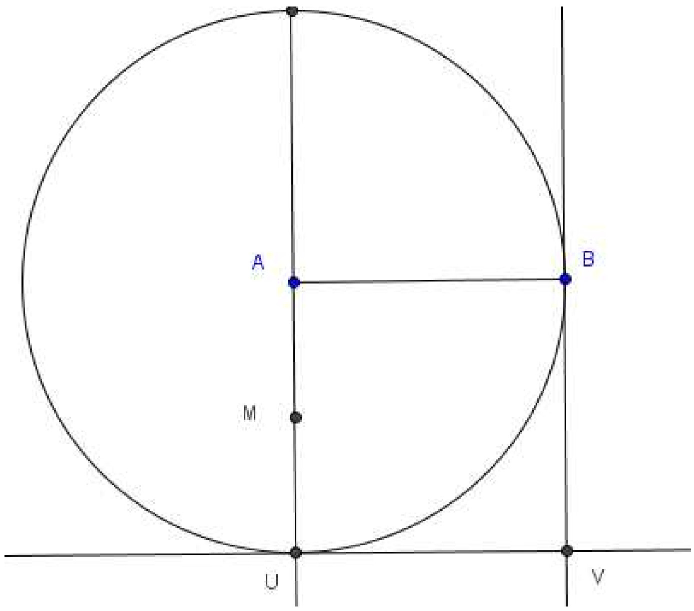
Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Hem localitzat x, és a dir la posició de P en el segment AB, però d'una forma aproximada i en un cas concret.

Veus alguna relació entre els valors d'a i d'x ?

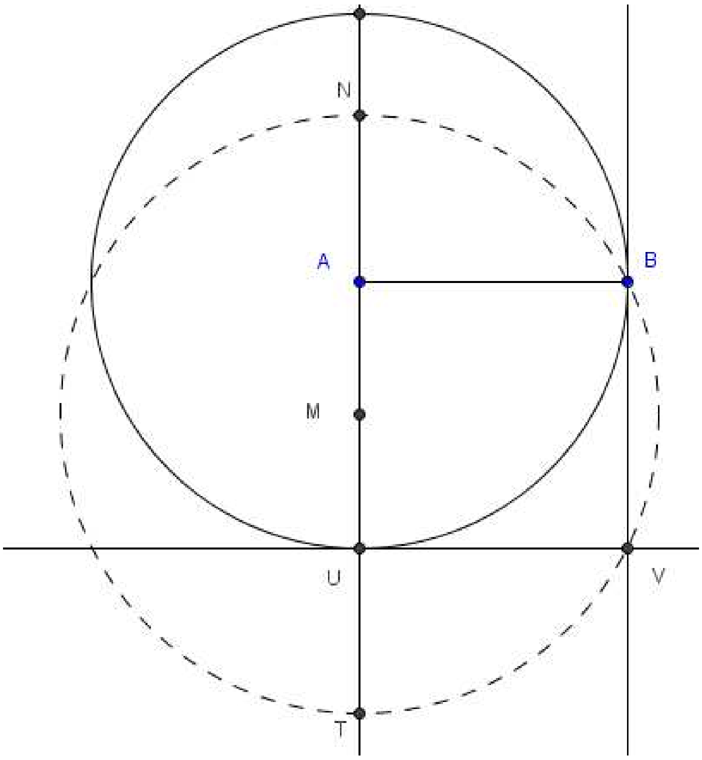
Ara veurem com s'ho va fer Euclides, fa quasi 2300 anys, per a resoldre el problema – la proposició 11 del Llibre II dels Elements- que ell mateix va plantejar:

Dibuixa el quadrat BAUV de costat igual al segment inicial AB, la longitud del qual anomenem a, i determina el punt mitjà del costat AU, que en direm M.



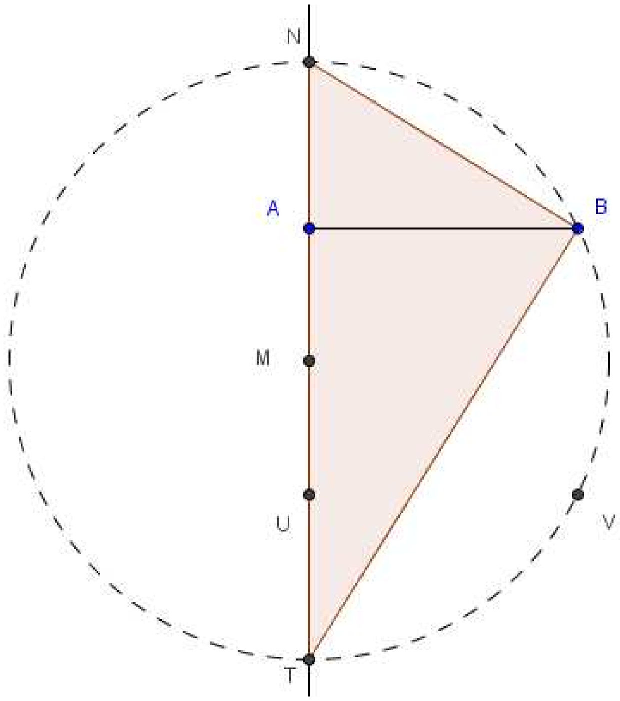
A continuació amb centre a M i radi MB dibuixa una circumferència que tallarà la recta que conté el costat AU en el punt N.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL



La distància AN és la solució del problema, és a dir, és la x que resol l'equació plantejada.

Per que? Si ens fixem en la circumferència que acabem de dibuixar i en els punts N, B i T ens adonarem que tenim un triangle rectangle, i aquest triangle té hipotenusa NT, altura sobre la hipotenusa AB, i AN i AT són els segments en què l'altura divideix la hipotenusa.



A més, resulta que NA és igual a UT.
En efecte, com que M és el punt mig del costat AU tenim que AM = MU, i com que M és el centre de la circumferència NM = MT i d'aquí

$$NA = NM - AM = MT - MU = UT$$

El Teorema de l'altura ens diu que AB és la mitjana proporcional dels segments: AN y AT:

$$\frac{NA}{AB} = \frac{AB}{AT}$$

Si considerem que la longitud del segment AB és a i que la longitud de NA és x, la longitud del segment AT serà $a+x$ (AT = AU+UT = AB + NA) i podrem escriure:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{a+x}$$

La proporció anterior es correspon amb l'equació:

$$a^2 = (a+x)\cdot x$$

o sigui amb l'equació

$$a^2 = a\cdot x + x^2$$

i finalment amb

$$x^2 + a\cdot x - a^2 = 0$$

Proposta 1

Utilitza els teus coneixements d'àlgebra per a resoldre aquesta equació de segon grau, o sigui, la fórmula general. Et surten 2 solucions diferents? Apareixen aquestes solucions en la resolució geomètrica? Per què?

Proposta 2

En el cas concret d'$a = 1$, la solució que s'obté és l'invers del número auri.
Calcula'n l'aproximació decimal.
Busca informació a internet sobre el número auri: el seu valor i el significat geomètric. Comprova que la solució de l'equació i ϕ, símbol que representa el número auri, són l'invers un de l'altre.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL