# Geometría dinámica

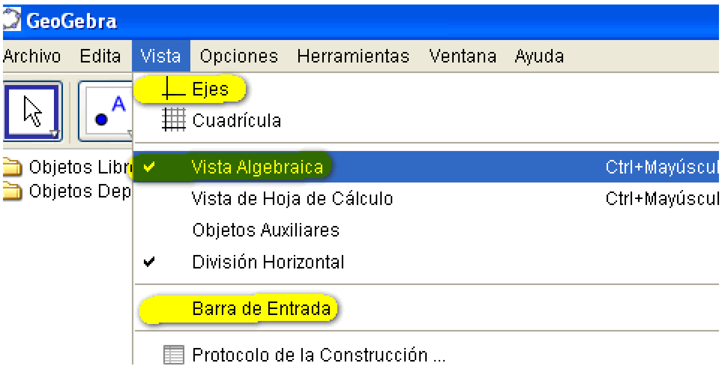
## *Explorando los triángulos y sus centros*

*Manuel Sada Allo*



En Geometría, la figura más estudiada ha sido y sigue siendo el triángulo. Casi todo es reducible a triángulos y eso los convierte al *rey de los polígonos* en una de las herramientas más poderosas de la Geometría. Gracias al triángulo se puso medir la Tierra, calcular la distancia a la Luna o, sencillamente construir y articular una grúa.

Trabajaremos con *GeoGebra*, del que sólo aprovecharemos su faceta de programa de Geometría Dinámica: prescindiremos de algunos de los elementos, por defecto, visibles al inicio. Nada más abrir el programa, oculta (desde el menú *Vista*) los **Ejes**, la **Ventana Algebraica** y la **Barra de Entradas**. Para no repetir la misma operación repetidamente utiliza **Opciones**, **Guardar configuración**.



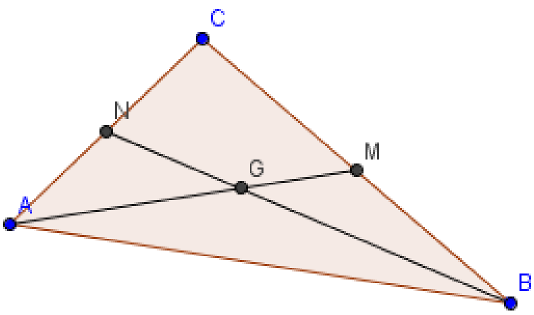

## Actividad 1.1: Medianas de un triángulo. Baricentro

Esta es la actividad que ya has hecho en casa.

Los segmentos que unen cada vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto se llaman *medianas* del triángulo.

Dibuja un triángulo $ABC$. Puedes utilizar la herramienta **Expone/Oculta rótulo** (del último menú) para visualizar los nombres de los vértices.

Dibuja dos medianas del triángulo: $AM$ y $BN$. Las herramientas **Punto medio** y **Segmento entre dos puntos** te serán de utilidad.




Las dos medianas se cortan en el punto $G$. Comprueba que la tercera mediana $CP$ también pasa por ese punto. Ese punto $G$ es el *baricentro* del triángulo y en él concurren las tres medianas.

Utiliza la herramienta **Distancia o Longitud** para medir los dos segmentos en que el baricentro $G$ divide a una cualquiera de las tres medianas. (Para medir, por ejemplo, el segmento $AG$, has de seleccionar la herramienta y luego hacer clic primero en $A$ y luego en $G$).

Modifica la posición de los vértices del triángulo y observa cómo cambian las longitudes



Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

anteriores. ¿Observas alguna relación entre ellas?

Comprueba si esa relación se cumple también en las tras dos medianas. Inserta un comentario (**Inserta texto**) expresando la propiedad relativa al baricentro y a los segmentos que determina sobre cada una de las medianas.

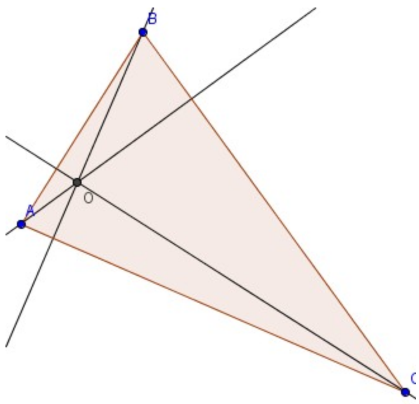
Guarda la figura en *a1baricentro.ggb*

## Actividad 1.2: Alturas de un triángulo. Ortocentro

Si trazamos la recta perpendicular a un lado del triángulo por el vértice opuesto, obtendremos una *altura*. La distancia que separa a un vértice del lado opuesto es fundamental para calcular el área del triángulo.

Dibuja un triángulo $ABC$. Dibuja en él una altura. Mueve los vértices y comprueba la validez de tu construcción (es decir que la altura sigue siendo la perpendicular a un lado por el vértice opuesto.

Dibuja una segunda altura. Estas líneas se cortan en un punto, que llamaremos $O$. Dibuja la tercera altura y comprueba que $O$ pertenece a ella. Ese punto es el *ortocentro* del triángulo.




Al mover los vértices comprobarás que el ortocentro no siempre se sitúa en el interior del triángulo. Investiga e incluye un comentario aclarando en qué casos es interior, exterior o pertenece a alguno de los lados del triángulo.

Ayuda: Si seleccionas la herramienta **Ángulo**, un *clic* en el interior del triángulo hará que se visualicen los valores de sus tres ángulos.

Guarda la figura en *a2ortocentro.ggb*

## Actividad 1.3: Mediatrices de un triángulo. Circuncentro y circunferencia circunscrita

Las mediatrices de un triángulo pasan por el punto medio de cada lado y además son perpendiculares a él.

Dibuja un triángulo $ABC$. Traza sus mediatrices (Selecciona la herramienta **Mediatriz** y haz clic sobre cada lado del triángulo).



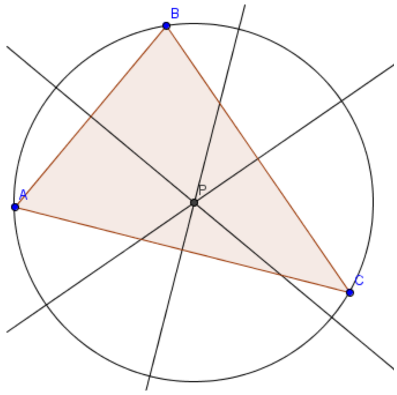
Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Comprueba que las tres concurren en un punto $P$.

Dibuja la circunferencia de centro $P$ que pasa por uno de los vértices.

Comprueba que los otros dos vértices también pertenecen a esa misma circunferencia.

Diremos que esa *circunferencia* está *circunscrita* al triángulo y que su centro $P$ es el *circuncentro* del triángulo.




Mueve los vértices del triángulo y comprueba los cambios en la figura.

Investiga: ¿De qué depende que el circuncentro esté dentro, fuera o sobre uno de los lados del triángulo? ¿Cuál de los tres vértices del triángulo queda más cerca del circuncentro?

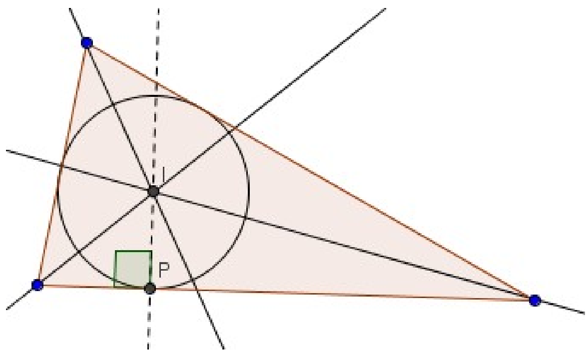
Escribe el resultado de tu observación utilizando la herramienta **Inserta texto**.

Guarda la figura en *a3circuncentro.ggb*

## Actividad 1.4: Bisectrices de un triángulo. Incentro y circunferencia inscrita

Dibuja un triángulo y sus tres bisectrices. Tras seleccionar la herramienta **Bisectriz** habrás de hacer *clic* sobre los tres vértices del triángulo (para cada bisectriz, en el orden adecuado).

Comprueba que concurren en un único punto $I$ (el *incentro*).




Dibuja una circunferencia con centro en el incentro y que toque un lado del triángulo en un único punto $P$. Para hacer esto, debes hacer que la circunferencia sea tangente a ese lado del triángulo, por tanto, debe pasar por la intersección entre el lado y la perpendicular al mismo por el centro de la circunferencia. Antes de hacer esto último, debes pensarlo con cuidado y asegurarte de que lo has entendido. (La figura adjunta puede ayudarte.)

Ya has dibujado la circunferencia. ¿Qué ha ocurrido? ¿Corta a más de un lado del triángulo? Investiga de qué lado del triángulo queda más cerca el incentro e **inserta** un **texto** justificando tus conclusiones.

Guarda la figura en *a4incentro.ggb*



Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

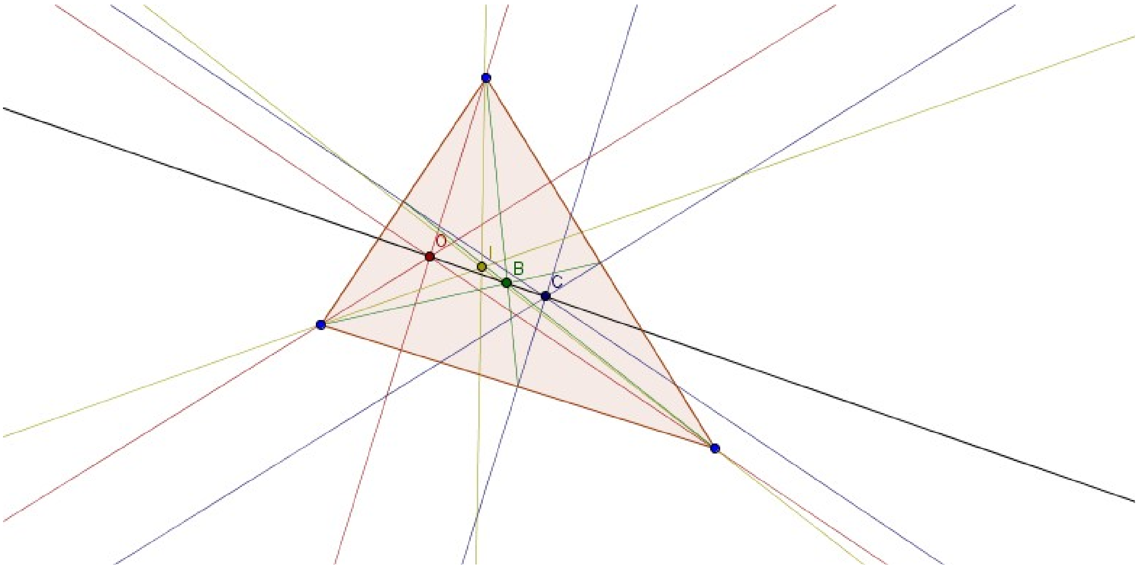
## Actividad 1.5: Relaciones entre los centros de un triángulo

Dibuja un triángulo escaleno. Sitúa en él, usando diferentes colores, las mediatrices, el circuncentro, las bisectrices, el incentro, las medianas, el baricentro, las alturas y el ortocentro.

Mueve los vértices del triángulo. Fue el genial Leonard Euler (1713-1789) el primero en darse cuenta de que tres de esos cuatro centros del triángulo permanecen alineados, independientemente de su forma. Dibuja la recta que los une (la *Recta de Euler*).

Guarda la figura en *a5centros.ggb*

Mueve de nuevo los vértices y analiza que les ocurre a los distintos centros y a la propia recta de Euler, según que el triángulo sea isósceles, equilátero, obtusángulo, rectángulo... Resume tus conclusiones.






Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL