Javier Bergasa Liberal

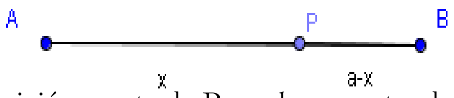
Más ecuaciones con regla y compás.
La ecuación de segundo grado $x^2+ax-a^2 = 0$

Hemos visto cómo resolver algunas ecuaciones "con regla y compás", aunque nuestra herramienta recomendada por su eficiencia será, de nuevo, Geogebra.

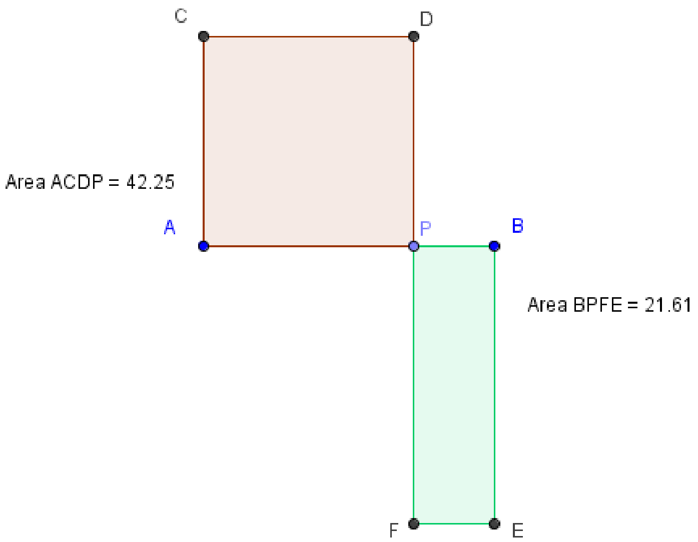
En este caso, en vez de empezar planteando la ecuación para después interpretar su sentido geométrico, lo haremos al revés: comenzaremos por un enunciado geométrico para concluir analizando su interpretación algebraica. ¿Por qué procedemos así? Sencillamente porque es así como los matemáticos griegos estudiaron estos problemas. En concreto, acudiremos al texto de Euclides, *Los elementos*, en cuyo Libro II encontramos este problema, nombrado como proposición 11: "Dividir un segmento en dos partes de manera que el rectángulo que tiene como lados el total y una de las partes sea igual cuadrado de la otra parte".

De acuerdo al enunciado, consideraremos un segmento de extremos A y B, y por lo tanto de longitud cualquiera, pero conocida. La longitud concreta del segmento en nada afecta al método de trabajo, así que la llamaremos a. El problema propone encontrar un punto P del segmento que divida a este en dos partes que satisfagan las condiciones del problema.

En el dibujo adjunto, el punto P divide al segmento AB, de longitud a, en dos partes AP y PB. Supondremos que la longitud de AP es x, por lo tanto la de PB es $a - x$.



Se trata ahora de localizar la posición exacta de P en el segmento, de manera que el cuadrado de lado AP y el rectángulo de lados PB y AB tengan la misma superficie., tal y como se pide en la proposición. En la figura hemos ubicado P en una posición que claramente no resuelve el problema planteado.



Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Una buena manera de acercarnos a la situación planteada y a la solución será realizar con Geogebra una construcción similar a ésta y manipular la posición del punto P hasta conseguir que las áreas de las figuras consideradas sean iguales.

En ese momento, para la longitud del segmento PB, habremos resuelto el problema. Pero qué significa eso.

Área ACDP= Área BPFE

Es decir, $AP^2 = PB \times BE$, pero como hemos construido $BE = AB$ podremos escribir:

$$AP^2 = PB \cdot AB$$

Utilizando ahora los valores considerados para esos segmentos, tendremos:

$$x^2 = (a - x) \cdot a$$

Y utilizando nuestros conocimientos algebraicos:

$$x^2 = a^2 - a \cdot x$$

Y finalmente:

$$x^2 + a \cdot x - a^2 = 0$$

Que efectivamente era nuestro objetivo: determinar x que satisface esta ecuación, es decir, resolver la ecuación.

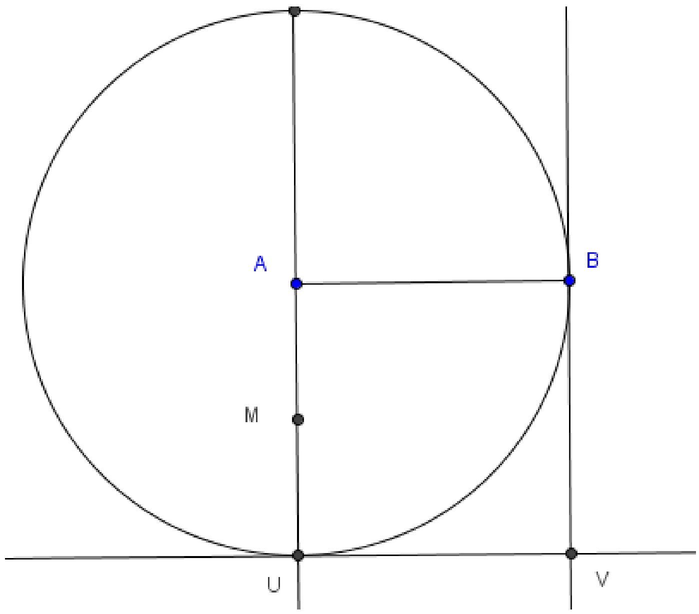
Nosotros hemos localizado x, es decir la posición de P en el segmento AB, de manera aproximada y para un caso concreto.

¿Encuentras alguna relación entre los valores de a y de x?

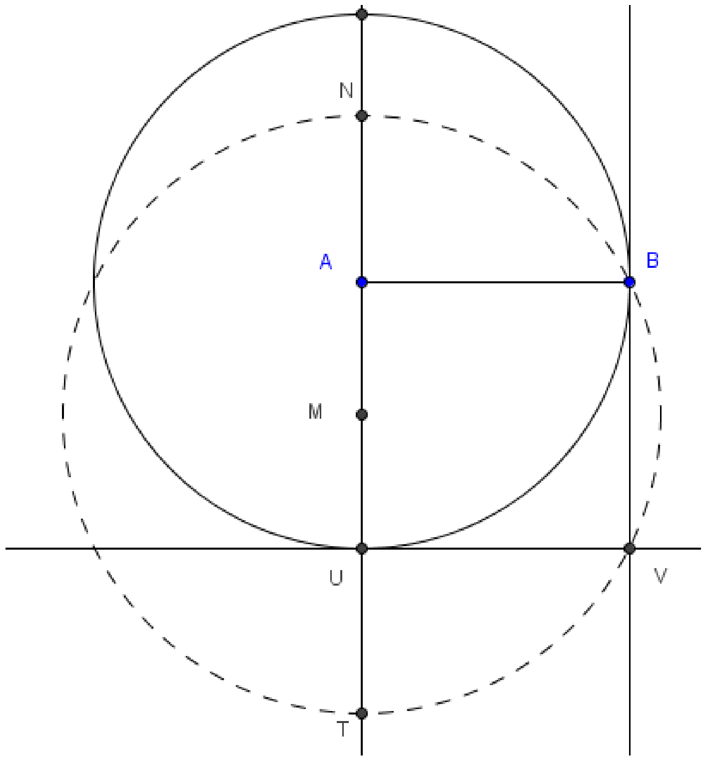
Veamos cómo procedió Euclides hace casi 2300 años para resolver el problema –la proposición 11 del Libro II de los Elementos– que él mismo planteó:

Construye el cuadrado BAUV de lado igual al segmento de partida AB, cuya longitud llamamos a, y determina al punto medio del lado AU, que llamaremos M.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL



A continuación con centro en M y radio MB traza una circunferencia que corta a la recta que contiene al lado AU en el punto N.



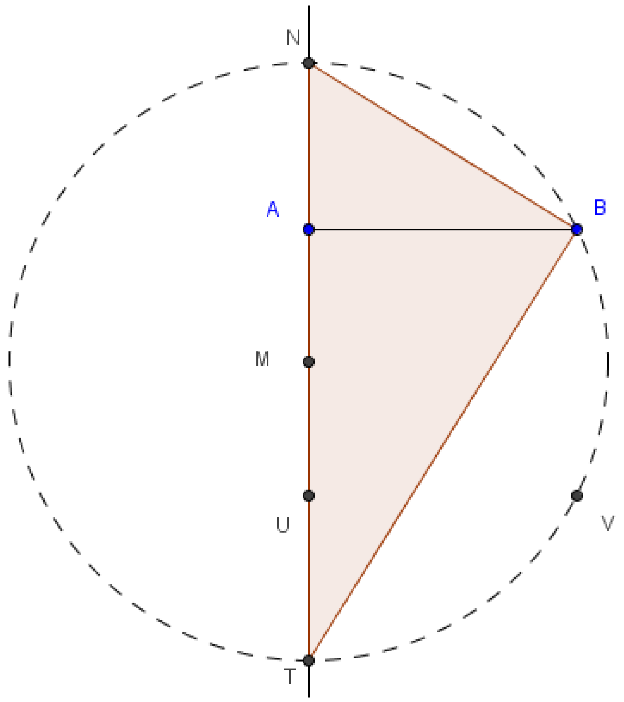
La distancia AN es la solución el problema, es decir, es la x que resuelve la ecuación planteada.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

¿Por qué? Quizás si nos ayudamos de un triángulo que tenga como lado el diámetro de la circunferencia ahora trazada, y representada con trazo discontinuo, y su vértice opuesto en B, seamos capaces de reconocer un triángulo rectángulo: NBT.

Este triángulo tiene NT por hipotenusa y AB como altura relativa al ángulo recto $\hat{\mathrm{B}}$.

Simplifiquemos la construcción anterior para que el exceso de líneas no nos impida analizar la solución.



Ahora sólo nos falta estudiar un detalle: NA=UT

La justificación es que M es punto medio del lado del cuadrado, por lo que los puntos N y T equidistan de M, como también lo hacen los puntos A y U. Dicho de otra forma, M es punto medio del segmento UN (lado del cuadrado) y también lo es del segmento NT (diámetro de la circunferencia construida).

El Teorema de la altura sostiene que AB es media proporcional de los segmentos: AN y AT:

$$\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AT}}$$

Si consideramos que la longitud del segmento AB es a, que la longitud de NA es x y la de AT es a+x, podremos escribir:

$$\frac{x}{a}=\frac{a}{a+x}$$

Atribuir a AT el valor $a + x$, obliga a recordar que esa circunferencia se ha trazado con radio igual al segmento AB, cuya longitud es a, como se acaba de decir. Por la tanto, siendo UT= NA, ambos de longitud x, el segmento AU tiene longitud a y AT es $a + x$.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

La proporción anterior corresponde a la ecuación

$$a^2 = (a + x) \cdot x$$

Esto es,

$$a^2 = a \cdot x + x^2$$

Y finalmente,

$$x^2 + a \cdot x - a^2 = 0$$

Propuesta 1

Utiliza tus recursos de álgebra para resolver esta ecuación de segundo grado, es decir, la fórmula general. ¿Encuentras con la fórmula 2 soluciones diferentes? ¿Aparecen esas soluciones al resolver geométricamente? ¿Por qué?

Propuesta 2

Para el caso concreto de $a = 1$, la solución obtenida es el inverso del número áureo.
Obtén su aproximación decimal.
Busca información en internet sobre el número áureo: su valor y significado geométrico. Comprueba que la solución de la ecuación y ϕ, símbolo que representa al número áureo, son inversos.

Elaborado por:
Profundiza
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL